Μάθημα 1ο

1/11/2019

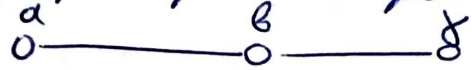
⤳ Η ανάγκη να λυθεί κάτι $\xrightarrow{\text{οδήγησε}}$ στη δημιουργία της θεωρίας γραφημάτων

⤳ Ένα γράφημα έχει κορυφή και ακμή

π.χ.

⤳ Συμβολισμός ενός γραφήματος $G=(V,E)$ όπου V σύνολο κορυφών, E σύνολο ακμών

⤳ Έστω ένα γράφημα με 2 ακμές και 3 κορυφές



$G=(\{\alpha,\beta,\gamma\},\{\alpha,\beta\},\{\beta,\gamma\})$

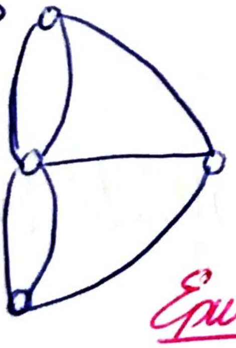
$V(G)=\{\alpha,\beta,\gamma\}$

$E(G)=\{\{\alpha,\beta\},\{\beta,\gamma\}\}$

⤳ Πρόβλημα του Koningberg

βαθμός κορυφών = ο αριθμός των ακμών που έχει κάθε κορυφή

βαθμός 3



βαθμός 5

βαθμός 3

βαθμός 3

—: ακμές - γέφυρες

O: κορυφές - ποτάμια

Ερώτημα: Να ξεκινήσω από ένα ποτάμι (κορυφή) και να φτάσω πίσω σ' αυτό έχοντας περάσει 1 φορά από κάθε γέφυρα (ακμή).

Θεώρημα Euler: Όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό $\Longleftrightarrow$ έχουμε κλειστή μονοκονδυλιά

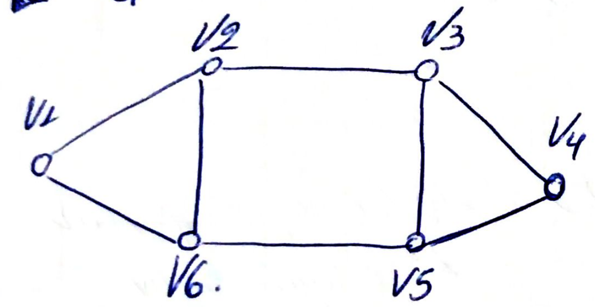
κλειστή ↓ επανερχόμαστε στην ίδια θέση

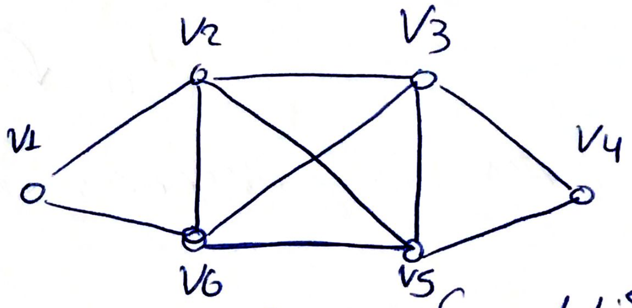
μονοκονδυλιά ↓ κάνει κάτι μία φορά

~> (Αντί) μονοκοντυλιά

↳ τα σχήματα χωρίς να περάσεις από την ίδια ακμή (δεν επανέρχομαι στην ίδια θέση)

► "G"





~> Οι ακμές δεν έχουν βελάκι. Είναι αμφίδρομες.

- $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$.
- $E(G)=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\{v_3,v_4\},\{v_4,v_5\},\{v_5,v_6\},\{v_6,v_1\},\{v_2,v_6\},\{v_3,v_5\}$
- $n=|V(G)|=6$, $m=|E(G)|=8$
- $N_G(v_3)=\{v_2,v_4,v_5\}$ όσες κορυφές ενώνονται με το v_3 αλλά χωρίς να γράψω το v_3
- $N_G(\{v_1,v_2,v_6\})=\{v_3,v_5\}$ όσες κορυφές ενώνονται με το $v_1 v_2 v_6$
- $V(H)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$
- $E(H)=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\{v_3,v_4\},\{v_4,v_5\},\{v_5,v_6\},\{v_6\ v_1\},\{v_2\ v_6\},\{v_2,v_5\},$
  $\{v_3,v_6\}\{v_3\ v_5\}\}$
- $n=|V(H)|=6$ και $m=|E(H)|=10$
- $N_H(v_3)=\{v_2,v_6,v_5,v_4\}$
- $N_H(\{v_1,v_2,v_6\})=\{v_5,v_3\}$

8/11/2019

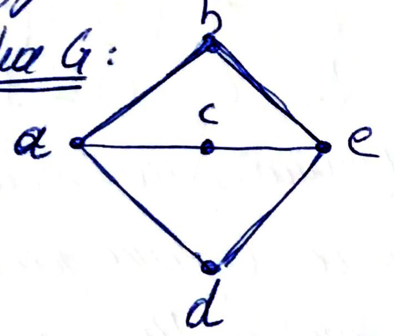
2ο Μάθημα:

• Ισομορφισμοί δύο γραφημάτων G και H

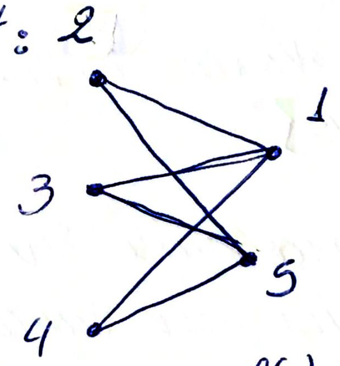
Υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση $f: V(G) \to V(H)$ τέτοια ώστε ένα ζεύγος κορυφών $\{u,v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H)$

Συμβολίζουμε τον ισομορφισμό μεταξύ των G και H ως $G \simeq H$

γράφημα G:



γράφημα H:



$f(a) = 1$
$f(b) = 2$
$f(c) = 3$
$f(d) = 4$
$f(e) = 5$

Π.χ.: Θα πρέπει το $f(a)\ f(b)$ "1,5" στο γράφημα H να είναι ακμή. Όμως δεν είναι. Συνεπώς τα 2 γραφήματα δεν είναι ισόμορφα.

↳ Με βάση αυτές τις τιμές τότε έχω ισομορφισμό στα δύο αυτά γραφήματα.

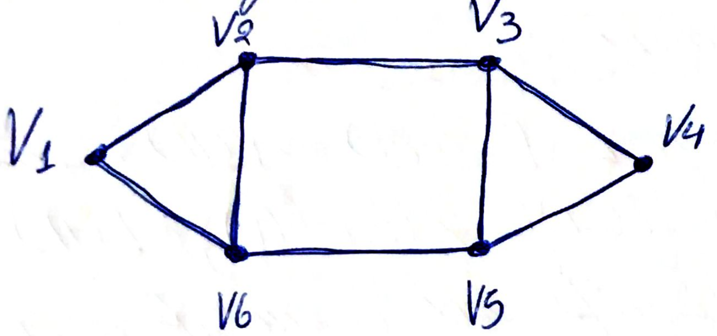
Παρατήρηση Η σχέση δύο γραφημάτων $G \simeq H$ είναι:
- αυτοπαθής: $G \simeq G$
- συμμετρική: $G \simeq H \Longleftrightarrow H \simeq G$
- μεταβατική: $G_1 \simeq G_2,\ G_2 \simeq G_3 \rightarrow G_1 \simeq G_3$

• Πίνακας Γειτνίασης

Ορισμός Ένα γράφημα G με σύνολο κορυφών $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν $n \times n$ πίνακα $A = [a_{i,j}]$ όπου ισχύει

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{αν } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \end{cases}$$

(πχ) Έστω το γράφημα:



$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

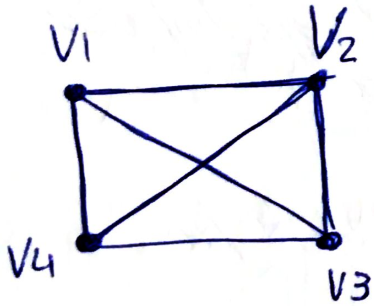
(πίνακας γειτνίασης του γραφήματος)

{Μπορώ να πω $V_1 \to V_2$ και από $V_2 \to V_1$ Αμφίδρομες κινήσεις}

→ Τα 0 στη διαγώνιο διότι δεν υπάρχει κανένα βέλος που να γυρνάει την ακμή στον εαυτό της (πχ από το V_1 να γυρνά V_1)

1 → Εκεί που οι 2 κορυφές συνδέονται

(πχ)



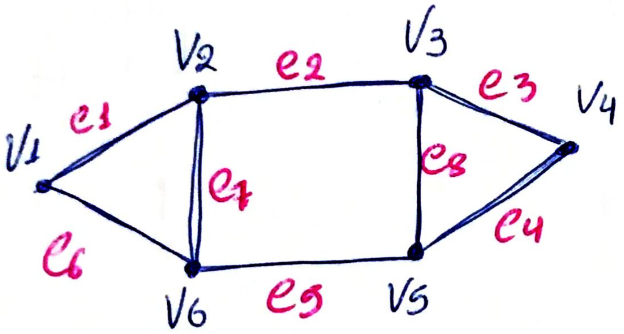
→ Ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ορισμός: Πίνακας Προσπτώσεων

Για ένα γράφημα G με σύνολο κορυφών $V(G)=\{V_1, \dots V_n\}$ και σύνολο ακμών $E(G)=\{e_1, \dots e_m\}$ ορίζουμε έναν $n \times m$ πίνακα $B=[b_{i,j}]$ όπου κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μια κορυφή και κάθε στήλη σε μια ακμή. Τα στοιχεία του πίνακα B ορίζονται ως εξής

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{αν η ακμή } e_j \text{ προσπίπτει στην κορυφή } V_i \\ 0 & \text{αν η ακμή } e_j \text{ δε προσπίπτει στην κορυφή } V_i \end{cases}$$



$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$V(G)=\{V_1, \dots V_n\} = \{V_1 \dots V_6\}$ $n=6$ (κορυφές)

$E(G)=\{e_1, \dots e_n\} = \{[e_1, \dots e_8]\}$ $m=8$ (ακμές)

$e_1 = \{V_1, V_2\}$. (θα έχω πίνακα 6×8)

• (1 πχ η e_1 ακουμπάει στην V_1, V_2 στις υπόλοιπες 0)
(η e_2 ακουμπάει στην V_2, V_3 στις υπόλοιπες όχι άρα 0)

Παρατηρήσεις:

1) Ο πίνακας γειτνίασης έχει n^2 στοιχεία και είναι συμμετρικός για μη κατευθυνόμενα γραφήματα

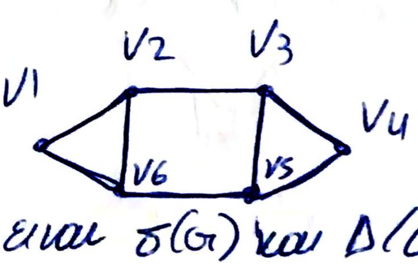
2) Όλες οι διαγώνιες τιμές του είναι μηδενικές

→ Με νοιάζει να έχω σταθερό κόστος όταν πηγαίνω από τη μια κορυφή στην άλλη

Παρατήρηση

~ Σε κάθε γράφημα αντιστοιχούν $n!$ διαφορετικοί πίνακες γειτνίασης

Βαθμοί Κορυφών



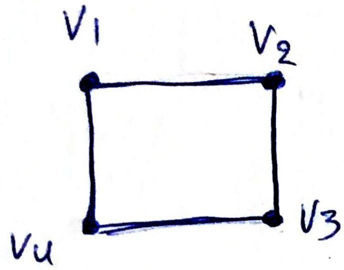
• Ο βαθμός κορυφών $deg_G(v) = |N_G(v)|$

• Ο ελάχιστος και μέγιστος βαθμός γραφήματος είναι $\delta(G)$ και $\Delta(G)$

• Ο μέσος βαθμός $d(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} deg(v)$

• Η πυκνότητα $\varepsilon(G) = \frac{m}{n}$ m = πλήθος κορυφών, n = πλήθος ακμών

Πχ



γράφημα G

$\delta(G) = 2$

$\Delta(G) = 2$

$d(G) = \frac{8}{4} = 2$

$\varepsilon(G) = 1$

15/11/2019

3ο Μάθημα

→ Βαθμοί Κορυφών

$deg_G(v) = |N_G(v)|$

$\delta(G)$ ελάχιστος βαθμός

$\Delta(G)$ μέγιστος βαθμός

$d(G) = \frac{1}{n}\sum_{v \in V(G)} deg(v)$ μέσος βαθμός

$\varepsilon(G) = \frac{m}{n}$

απομονωμένη κορυφή: βαθμός 0

εκκρεμής κορυφή: βαθμός 1

καθολική κορυφή βαθμός $n-1$.

Θεώρημα

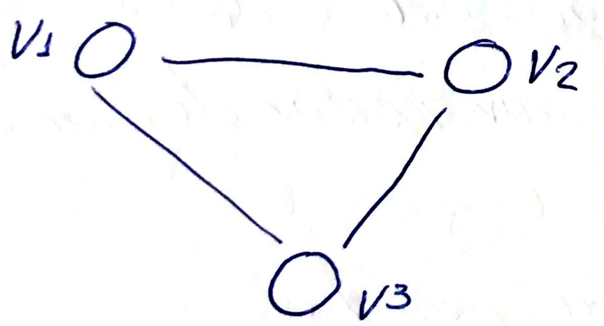
1) $\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2m$

2) $\delta(E) \leq d(G) \leq \Delta(G)$

3) $\varepsilon(G) = \frac{d(G)}{2}$

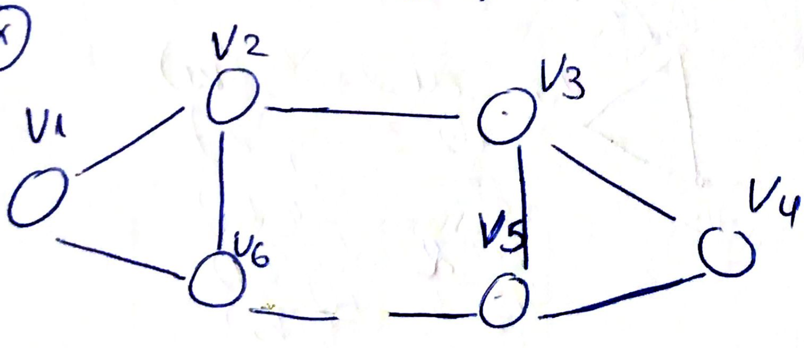
Λήμμα Κάθε γράφημα περιέχει άρτιο αριθμό κορυφών περιττού βαθμού

πχ



Έχω 0 βαθμού κορυφές

πχ



V1 βαθμός 2

V2 : 3

V3 3

V4 2

V5 3

V6 3

Αθροίζω κορυφές και δέχω άρτιο αποτ. → όλοι περιττοί ή όλοι άρτιοι

Τις αθροίζω και έχω $2+3+3+2+3+3 = 16 = 2 \cdot 8$

• Έστω $V(G)$ το σύνολο όλων των κορυφών όπου $V(G)=V_1 \cup V_2$

Το V_1: είναι οι κορυφές με περιττό βαθμό

Το V_2: είναι οι κορυφές με άρτιο βαθμό

γνωρίζουμε ότι $\boxed{\sum_{v\in V(G)} deg(v) = \sum_{v\in V_1} deg(v) + \sum_{v\in V_2} deg(v)}$

άρτιο = 2m άρτιο αποτ.

άρτιο

Άρα θα έχω: $\sum_{v\in V_1} deg(v)$ = άρτιο

(SOS) (Μπαίνει ΠΑΝΤΑ) (ασκήσεις)

~> Γραφική Ακολουθία

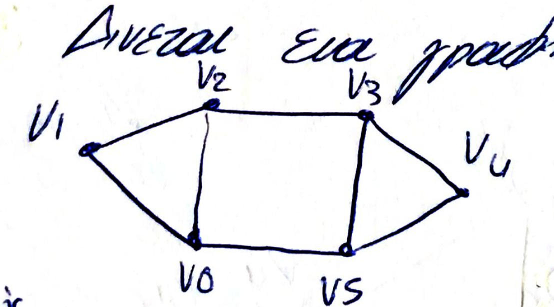
ΟΡΙΣΜΟΣ Μια ακολουθία ακεραίων $d=<d_1,\dots,d_n>$ όπου $d_1 \geq d_2 \geq d_n$ καλείται γραφική αν υπάρχει γράφημα G με n-κορυφές $V_1,\dots,V_n$ και βαθμούς $d_1,\dots,d_n$ αντίστοιχα

Το γράφημα αυτό θα λέμε ότι πραγματοποιεί την ακολουθία: 1) $\forall\, i=1\dots n$ ισχύει $0 \leq d_i \leq n-1$

2) το πλήθος των περιττών d_i είναι άρτιος αριθμός

Παράδειγμα:

Δίνεται ένα γράφημα



$2 = deg(v_1)$

$= deg(v_2)$

$3 = deg(v_3)$

$2 = deg(v_4)$

$3 = deg(v_5)$

$3 = deg(v_6)$

• Παίρνω τους βαθμούς d_i

$d = <2,3,3,2,3,3>$ 1ο βήμα τους ταξινομώ και θα έχω

$\underbrace{<3,3,3,3,2,2>}_{d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ d_5\ d_6}$

(όλοι οι βαθμοί ανάμεσα στο 0 και στο 5)

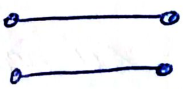
Είναι οι βαθμοί κατά φθίνουσα σειρά τα d για να είναι γραφική (αν ρωτήσει) θα πρέπει να πληρούνται τα 1 κ' 2

Οι βαθμοί είναι κάτω από 5 ($n-1 = 6-1 = 5$) και πλήθος των περιττών άρτιος αριθμός άρα <u>και</u> είναι γραφική

• Έστω (πχ) $\gamma = <6,6,5,5,3,3>$ Έστω γράφημα βαθμού 6 και έχω μια ακολουθία γ όπου γ Είναι γραφική? <u>Όχι</u> γιατί δεν έχω βαθμό >5

(πχ) $\gamma = <1,1,1,1>$ είναι γραφική (4 κορυφές με βαθμό 1) κ' πρέπει ότι το πλήθος κορυφών=άρτιο και είναι ανάμεσα στο $0 \le d \le 3$

$\gamma = <1,1,1>$ δεν είναι γραφική πλήθος κορυφών με περιττό βαθμό (=3)
$0 \le d \le 3$ <u>όμως</u> είναι περιττό

Το γράφημα $\gamma = <1,1,1,1>$:  (σχηματική αναπαράσταση)

Το γράφημα $\gamma = <1,1,1>$ $\nexists$

Άσκηση Είναι η ακολουθία $\gamma = <5,4,4,3,2,1,1>$ γραφική?

Έχω $n=7$ κορυφές

με κανένα να ισχύει $0 \le d_i \le n-1 \Rightarrow 0 \le d_i \le 6$ όροι } Άρα γραφική
(πλήθος περιττών βαθμών = άρτιο)
και έχω $5,3,1,1$: $\times 4$ βαθμοί που είναι άρτιοι

β' τρόπος G-V όπου έστω $\gamma = <5,4,4,3,2,1,1>$ ($n=7$ κορυφές)

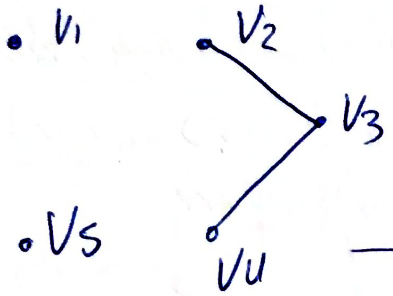
$\gamma' = <4-1,4-1,3-1,2-1,1-1,1> = <3,3,2,1,0,1>$ ($n=6$ κορυφές)

Ουσιαστικά είναι το προηγούμενο γράφημα πλην μιας κορυφής (της 5)

$\gamma' = <3,3,2,1,0,1> = <3,3,2,1,1,0>$ (τα διατάσσω)

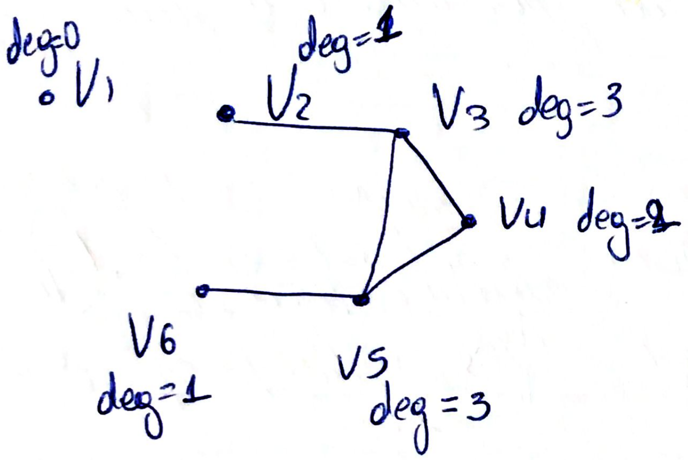
$\gamma'' = <2,1,0,1,0> = <2,1,1,0,0>$ ($n=5$ κορυφές)

$\gamma''' = <0,0,0,0>$ όλες 0 είναι γραφική Αφού η γ''' γραφική τότε και η γ



$\gamma'' = \langle 2,1,1,0,0 \rangle$.

→ (σχηματική αναπαράσταση του γραφήματος) μέσω της γ'' ακολουθίας



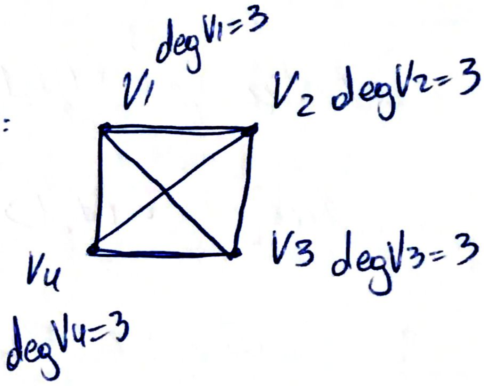
όπου το γράφημα αυτό αντιστοιχεί στην ακολουθία γ' όπου $\gamma' = \langle 3,3,2,1,1,0 \rangle$

πχ Έστω το γράφημα K_4 όπου K_4:

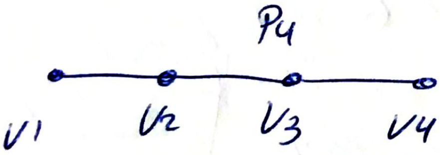
$\gamma = \langle 3,3,3,3 \rangle$ και έχω $0 \le d_i \le 3$

(έχω ×4 κορυφές άρα $n-1 = 3$)

Είναι γραφική ×4 φορές το 3. ✓



πχ



Έστω το γράφημα P_4. Είναι γραφική

$\gamma = \langle \underbrace{2}_{\deg V_2}, \underbrace{2}_{\deg V_3}, \underbrace{1,1}_{\deg V_1 = \deg V_4} \rangle$

1) $0 \le d_i \le 3$

2) Πλήθος περιττών (δηλ. το 1) είναι ×2 φορές

Άρα είναι γραφική ✓

Ορισμός: Διμερή γραφήματα

(ν)

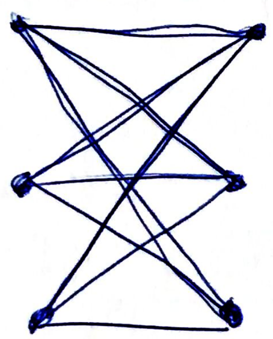
Διμερές γράφημα με σύνολο κορυφών $G(V,E)$ και σύνολο ακμών E όπου $V(G) = A \cup B$ με $A \cap B = \emptyset$ και $\{(x,y)\} \in E(G) : x \in A,\ y \in B\}$

- Τα σύνολα A, B ονομάζονται διαμέριση του G
- Συμβολίζουμε ένα διμερές γράφημα ως $G = (A, B, E)$

• Πλήρες διμερές γράφημα $G = (A, B, E)$

$\forall x \in A,\ y \in B$ $\{(x,y)\} \in E(G)$ Συμβολίζεται με $K_{p,q}$ $p = |A|, q = |B|$

λχ



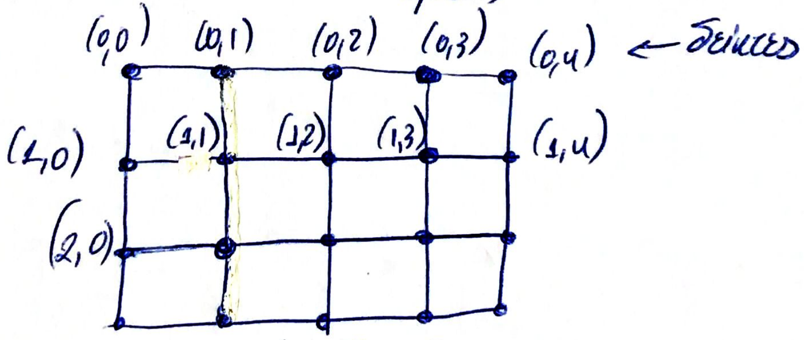
Πλέγμα

Έστω $X = \{x_1, \dots x_n\}$ και $Y = \{y_1 \dots y_n\}$ τότε το πλέγμα

$R_{p,q} = (X \times Y, \{(x_i, y_j), (x_k, x_l)\} \mid |i-k| + |j-l| = 1)$

(διαφορά)

Το πλέγμα $R_{4,5}$



Το γράφημα αντιστοιχεί σε επίπεδο δισδιάστατο πλέγμα όπου

$V(R_{p,q})$: τομές των ευθυγράμμων τμημάτων του πλέγματος

$E(R_{p,q})$: τα ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ των κορυφών

Ορισμός: γραμμικό γράφημα

Το γραμμικό γράφημα ενός $G(V,E)$ ορίζεται ως εξής:

$L(G) = (E(G), \{e, e'\} \mid e, e' \in E(G)$ και $e \cap e' \neq \emptyset \})$

δηλ. οι κορυφές του $L(G)$ είναι οι ακμές του G και δυο κορυφές του $L(G)$ ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν οι αντίστοιχες ακμές έχουν κοινό άκρο

Άσκ Βρείτε τις $\delta(G)$ και $\Delta(G)$ $\forall$ τιμή των $p, q \geq 1$ στις εξής περιπτώσεις
1) $G \simeq K_{p,q}$
2) $G \simeq R_{p,q}$.

Μάθημα 4ο

• Συνεκτικότητα και αποστάσεις πάνω σε γραφήματα

Μονοπάτι: Μονοπάτι στο G θα λέγεται μια ακολουθία κορυφών $u_1 \xrightarrow{e_1} u_2 \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_{n-1}} u_n$ όπου η ακμή e_j συνδέει τις κορυφές u_j και u_{j+1}, $j=1,2,n-1$.
Το πλήθος των ακμών $(n-1)$ που εμφανίζονται σ' ένα μονοπάτι θα λέγεται μήκος του μονοπατιού. Ένα μονοπάτι μπορεί να χρησιμοποιεί μια ακμή του γραφήματος G παραπάνω από μια φορά.

Κύκλωμα: Λέγεται ένα μονοπάτι όπου η τελευταία κορυφή είναι ίδια με την πρώτη. Όταν θέλουμε να μιλήσουμε για κύκλωμα χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές θα το αποκαλούμε κύκλο.

Προσιτή Κορυφή: Θα λέμε ότι η κορυφή u είναι προσιτή από τη κορυφή v αν υπάρχει μονοπάτι που να ξεκινά από τη u και να καταλήγει στην v.

Συνεκτικό γράφημα: Ένα γράφημα λέγεται συνεκτικό αν έχει μόνο μια συνεκτική συνιστώσα αν δηλ. κάθε κορυφή συνδέεται με κάθε άλλη μέσω ενός μονοπατιού.

• **Ορισμός**: Ορίζουμε $d: V \times V \to \mathbb{R}$ που θα έχει την έννοια της απόστασης. Η ποσότητα $d(u,v)$ θα μετράει το πόσο κοντά είναι οι δύο κορυφές u και v του γραφήματος. Αν η κορυφή u δεν είναι προσιτή από την κορυφή v ορίζουμε $d(u,v)=d(v,u)=\infty$

Αλλιώς ορίζουμε $d(u,v)$ να είναι το ελάχιστο μήκος του μονοπατιού που συνδέει τα u,v δηλ το μονοπάτι με τις λιγότερες ακμές $\forall u,w,v \in V \; d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

Διάμετρος ενός γραφήματος G λέγεται και είναι η μέγιστη απόσταση ανάμεσα σε 2 κορυφές του G

$$\boxed{\operatorname{diam} G = \max_{u,v \in V} d(u,v)}$$

Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα με n-κορυφές κ' μέγιστο βαθμό d τότε:

$$\boxed{n \leq 1 + d \, \frac{(d-1)^{\operatorname{diam} G} - 1}{d-2}}$$

Δένδρα και Δάση

Ένα συνεκτικό γράφημα που δε περιέχει κύκλους ονομάζεται δένδρο
Ένα γράφημα συνεκτικό ή μη που δε περιέχει κύκλους ονομάζεται δάσος

Ορισμός Ένα δένδρο T υπογράφημα του G και με τις ίδιες κορυφές λέγεται δένδρο που παράγει το G (spanning tree)

- Αν το t δεν είναι δένδρο αλλά είναι δάσος κ' κάθε συνεκτική συνιστώσα του G παράγεται από κάποιο δένδρο T, τότε το T λέγεται δάσος που παράγει το G.

- Κάθε δένδρο με n- κορυφές έχει ακριβώς n-1 ακμές και

Πόρισμα: Αν ένα συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές έχει n-1 ακμές τότε είναι δένδρο

Ένα απλό γράφημα $G=(V,E)$ αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών V και ένα σύνολο ακμών E

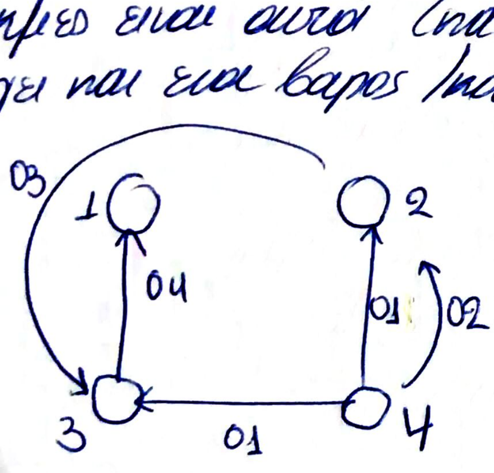
Γενικεύσεις της έννοιας του γραφήματος **κατευθυνόμενα γραφήματα** είναι ζευγάρια (V,E) όπου και πάλι V είναι το σύνολο κορυφών αλλά το σύνολο E των ακμών είναι τώρα όχι ένα σύνολο διμελών υποσυνόλων V αλλά ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών με στοιχεία από το V δηλ $E \subseteq V \times V$

Πολλαπλές ακμές γραφήματα με πολλαπλές ακμές είναι αυτά (κατευθυνόμενα ή μη) στα οποία η ακμή μπορεί να μην υπάρχει καθόλου, να υπάρχει φορά, 2 φορές κλπ

~ Ο αριθμός των φορών που εμφανίζεται η ακμή λέγεται πολλαπλότητα ακμής

~ Αυτοσυνδέσεις ή βρόχοι είναι αυτά στα οποία επιτρέπουμε μια κορυφή να συνδέεται με τον εαυτό της

~ Μια τέτοια ακμή ονομάζεται αυτοσύνδεση ή βρόχος. Βάρος στις ακμές είναι αυτά (κατευθυνόμενα ή μη) στα οποία κάθε ακμή έχει και ένα βάρος (κόστος)



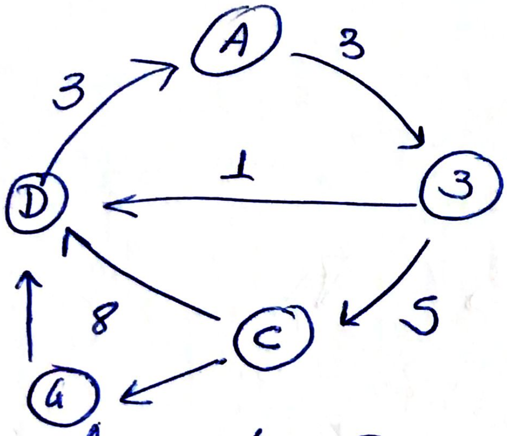
~ Απόσταση σε γραφήματα με βάρη είναι το άθροισμα των βαρών των ακμών που συμμετέχουν σ' ένα μονοπάτι

Απόσταση ανάμεσα στις u,v ορίζεται ως το ελάχιστο μονοπάτι για το συνδέει.

Μαθημα 5ο

29/11/2019

Αλγοριθμος Dijscra



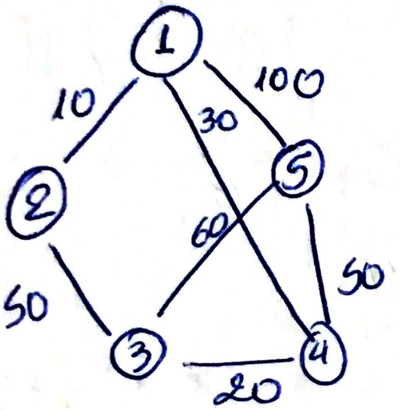
A→B→C→D κοστος 3+5+8=16

A→B→D κοστος 3+1=4

Αλγοριθμος Dijscra (ότι θα το λαχει)

1) Εστω γραφος n κομβων
2) Εστω S ο αφετηριας κομβος
3) για i=2 μεχρι n
4) $D_i = C_{1i}$ / Αρχικοποιηση του D_i
5) τελος για (i)
6) για i=1 μεχρι n−1.
7) Επελεξε κομβο απ'το συνολο V-S τετοιου ωστε το αντιστοιχο D να ειναι ελαχιστο
8) Προσθεσε τον κομβο w στο συνολο S δηλ S=S
9) για καθε κομβο V του συνολο V-S
10) D_v = ελαχιστο (D_v; $D_w + C_{wv}$)
11) τελος
12) τελος αλγοριθμου

Άσκηση (πρόοδος)



Κόστος

c[1,2]=10
c[1,4]=30
c[1,5]=100
c[2,3]=50
c[3,4]=20
c[4,5]=60
c[3,5]=60

Εκφώνηση

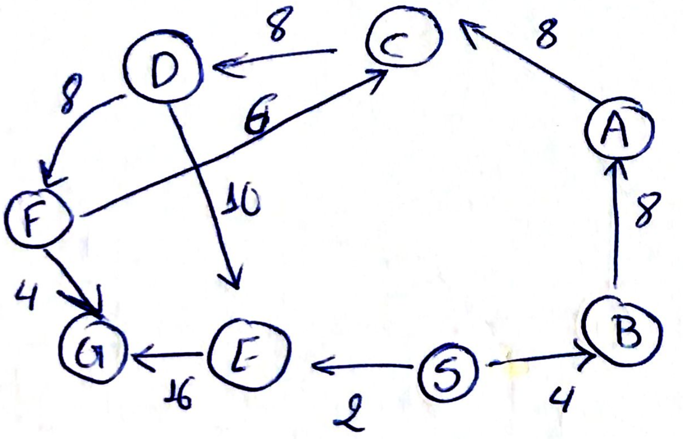
- Ποιος είναι ο συντομότερος δρόμος στο συγκεκριμένο γράφημα από τη κορυφή 1 σε όλες τις κορυφές?
- Εφάρμοσε τον αλγόριθμο Disjcra στο ανωτέρω βεβαρημένο γράφημα (γράψε βέλτιστη διαδρομή)

Επαναλήψεις	S	w	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
Αρχική	1		10	∞	30	100
1	1,2	2	10	60	30	100
2	1,2,4	4	10	50	30	90
3	1,2,4,3	3	10	50	30	90
4	1,2,4,3,5	5	10	50	30	90

1 → 2 → 4 → 3 → 5 Η πιο σύντομη διαδρομή (χαμηλότερο κόστος)

Άσκηση

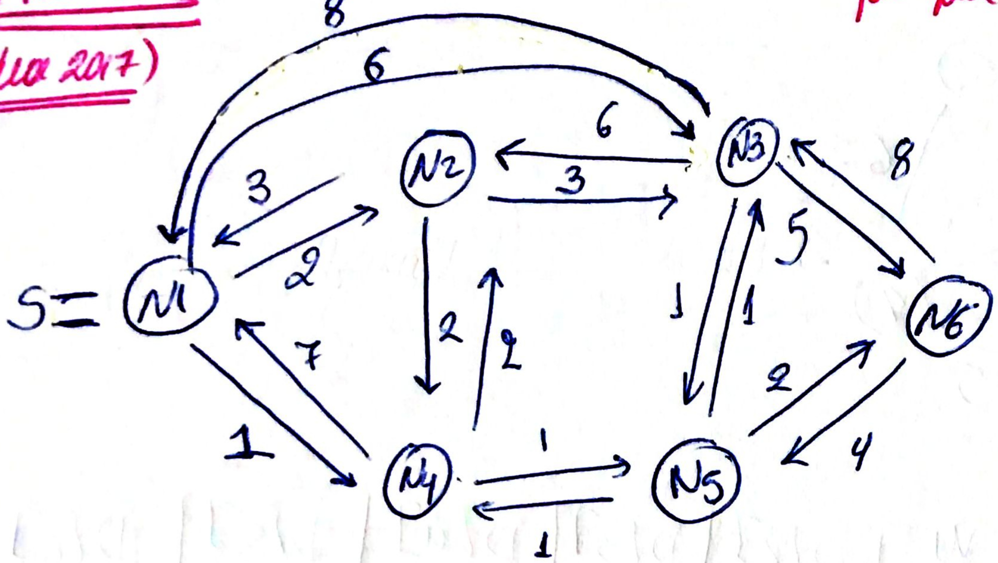
Έστω το ακόλουθο βεβαρημένο γράφημα G(V,E) Εφαρμόστε τον αλγόριθμο Dijkstra για να βρείτε τα συντομότερα μονοπάτια απ' την κορυφή S προς οποιαδήποτε άλλη κορυφή (Αρχική η S)



Επανάληψη	S	W	D[A]	D[B]	D[C]	D[D]	D[E]	D[F]	D[G]
Αρχική	S		∞	4	∞	∞	2	∞	∞
1η	SE	E	∞	4	∞	∞	2	∞	18
2η	SEB	B	12	4	∞	∞	2	∞	18
3η	SEBA	A	12	4	20	∞	2	∞	18
4η	SEBAG	G	12	4	20	∞	2	∞	18
5η	SEBAGC	C	12	4	20	28	2	∞	18
6η	SEBAGCD	D	12	4	20	28	2	36	18
7η	SEBAGCDF	F	12	4	20	28	2	36	18

Άσκηση (έπεσε μέσα!) Μάθημα 6ο 6/12/2019

(Θέμα 2017)



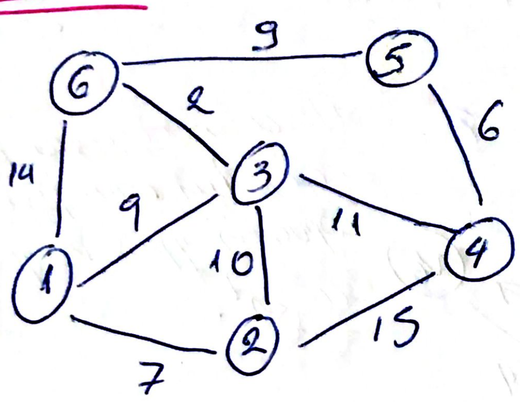
Ποια η συντομότερη διαδρομή από μια κορυφή προς κάποια άλλη?

Αλγόριθμος Dijstra.

- Επιλέγουμε μια κορυφή εκκίνησης S
- Επιλέγουμε την κοντινότερη κορυφή (αυτόν με το μικρότερο κόστος) στη ρίζα κορυφή
- η νέα κορυφή έχει ανακαλυφθεί
- Κατόπιν εντοπίζουμε την κοντινότερη κορυφή στο S τέτοια ώστε αυτή να μην έχει ανακαλυφθεί ακόμα
- αυτή να είναι απευθείας συνδεδεμένη στον S ή να είναι συνδεδεμένη με κάποια κορυφή που έχει ήδη ανακαλυφθεί
- η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι να ανακαλυφθούν όλες οι κορυφές του γραφήματος

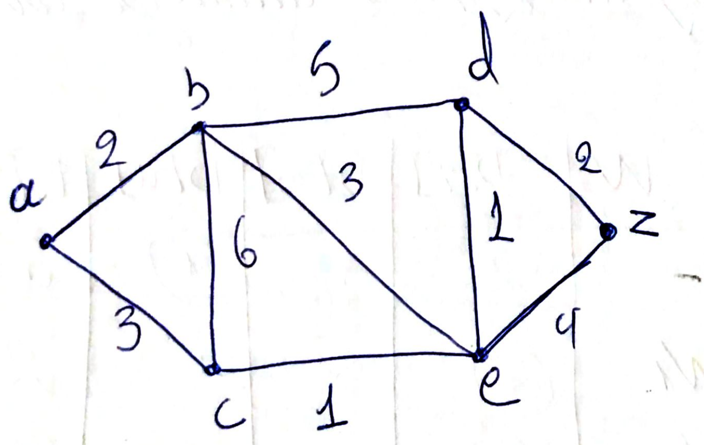
Επαναλήψεις	S	W	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]	D[6]
Αρχική	N_1	—	2	5	1	∞	∞
1η	N_1-N_1	N_1	2	5	1	2	∞
2η	$N_1-N_1-N_2$	N_2	2	5		2	∞
3η	$N_1-N_1-N_2-N_5$	N_5	2	3	1	2	4
4η	$N_1-N_1-N_2-N_5-N_3$	N_3	2	3	1	2	4
5η	$N_1-N_1-N_2-N_3-N_5-N_6$	N_6	2	3	1	2	4

Άσκηση

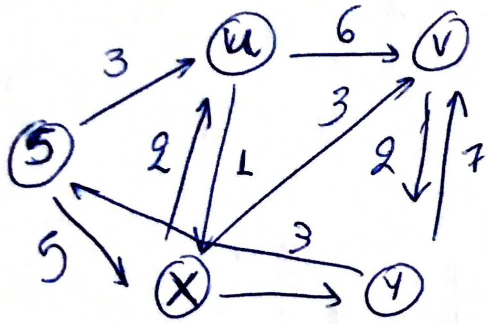


Επανάληψη	S	w	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]	D[6]
Αρχική	1	—	7	9	∞	∞	14
1η	1,2	2	7	9	22	∞	14
2η	1,2,3	3	7	9	20	∞	11
3η	1,2,3,6	6	7	9	20	20	11
4η	1,2,3,6,4	4	7	9	20	20	11
5η	1,2,3,6,4,5	5	7	9	20	20	11

Άσκηση



Λύση



Αλγόριθμος Bellman-Ford

Ο αλγόριθμος ε από ένα ριζικό κορυφής S βρίσκει τη συντομότερη διαδρομή προς τις κορυφές με την προϋπόθεση ότι περιέχουν το πολύ μια ζεύξη κατόπιν βρίσκει την συντομότερη διαδρομή προς τις κορυφές με την προϋπόθεση να περιέχουν το πολύ δύο ζεύξεις

- Συνεχίζει κατά τον τρόπο αυτό για $n-1$ φορές όπου n το πλήθος των κορυφών.

Μαθήματα :

Θ. γραφημάτων Πρόοδος 10/1 στις 6. (ασκήσεις θα βάζει όχι ορισμούς!)

Πρόβλημα Χρωματισμού Γραφημάτων!

Μας ενδιαφέρει να ορίσουμε ένα γράφημα G σαν μια διαμέριση $V(G) = X_1 + \dots + X_C$, C-χρωματισμός.

↓

(τα χωρίζουμε χρωματικές κλάσεις).

• Το C λέγεται χρωματικός αριθμός

↝ κ-χρωματισμός :

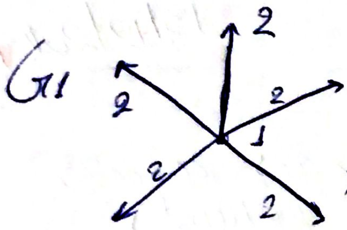
Έστω γράφημα G. Η συνάρτηση $\chi_{(G)} : V(G) \to [1,2,3 \dots n]$ ονομάζεται κ-χρωματισμός του γραφήματος αν για κάθε ακμή $e=(u,v) \in V(G)$ ισχύει το χρώμα της μιας κορυφής να μην είναι ίδιο με το χρώμα της άλλης δηλ. $\chi(u) \neq \chi(v)$

↝ Χρωματικές κλάσεις :

Έστω ένα γράφημα G και έστω χ ένας κ-χρωματισμός. Τα σύνολα $\chi^{-1}(1), \chi^{-1}(2) \dots \chi^{-1}(k)$ ονομάζονται χρωματικές κλάσεις

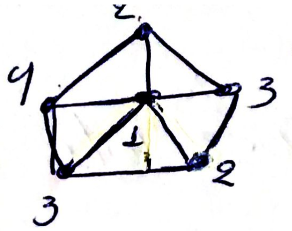
↝ Χρωματικός Αριθμός :

Έστω ένα γράφημα G. Ο χρωματικός αριθμός $\chi(G)$ του γραφήματος G είναι ο μικρότερος ακέραιος κ για τον οποίο ισχύει ότι το G είναι κ-χρωματίσιμο



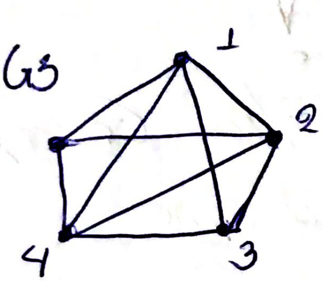
$\chi(G_1)=2$

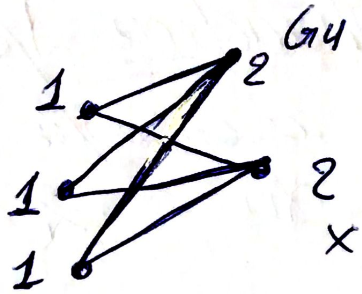
$\times$ 2 χρώματα



$\chi(G_2)=4$

$\times$ 4 χρώματα χρειάζονται





$\chi(G_4)=2$

$\times$ 2 χρώματα χρειάζονται

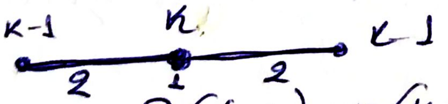
$\chi(G_3)=4$

$\times$ 4 χρώματα χρειάζονται

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω G ένα απλό γράφημα κ' έστω u και v δύο μη-γειτονικοί κόμβοι του G. Ο αλγόριθμος Sequential-Coloring χρωματίζει ένα γράφημα τάξης n. Αν $G_1 = G+(u,v)$ και $G_2 = G/(u,v)$ τότε ισχύει $P(G,K) = P(G_1,K) + P(G_2,K)$.

Χρωματικά Πολυώνυμα

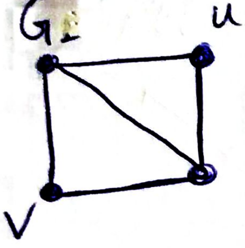
Ορισμός: Χρωματικό Πολυώνυμο ή χρωματική συνάρτηση του γραφήματος G συμβολίζεται $P(G,K)$ και δίνει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που μπορούν να χρωματιστούν οι κόμβοι ενός γραφήματος με κ-χρώματα.

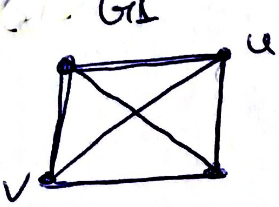


$P(G,K) = K(K-1)^2$

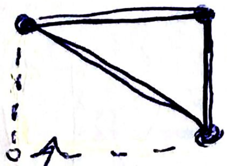
$\chi(G)=2$.

• Άσκηση



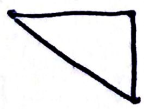


(+ μια ακμή)

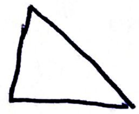


αφαιρώ αυτό (− μια ακμή)

→ (είναι ισόμορφα τους) τα διπλανά δηλ.



ή



πχ

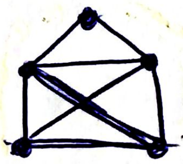
συμπτύξη του γραφήματος και

• Χρωματικό πολυώνυμο:

$$P(K_n,k) = k(k-1)\dots(k-n+1)$$

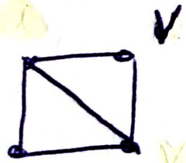
πχ $P(G,k) = P(K_4,k) + 3P(K_3,k) = k(k-1)(k-2)(k-3) + 3k(k-1)(k-2)$

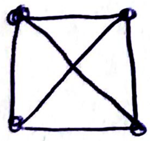
• Άσκηση: Δίνεται το γράφημα G.



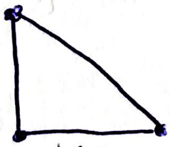
G.

G:





K_4



K_3

$$P(G,k) = P(K_4,k) + P(K_3,k) = k(k-1)(k-2)(k-3) + k(k-1)(k-2)$$
$$= k(k-1)(k-2)^2$$

20/12/2019

Μαθημα 8ο

1ο/1 Προοδος!!

Χρωματικά Πολυώνυμα

Χρωματικό Πολυώνυμο ενός γραφήματος G συμβολίζεται $P(G,\kappa)$ και δίνει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που μπορούν να χρωματιστούν οι κόμβοι του γραφήματος G με κ χρώματα

(όλες οι κορυφές ενώνονται με όλο το υπόλοιπο)

- Αν έχουμε ένα πλήρες γράφημα τότε ο τύπος είναι

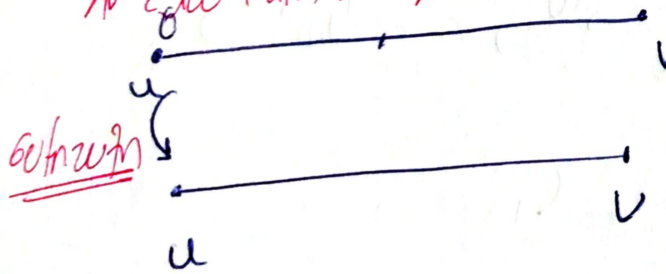
$$\boxed{P(K_n,\kappa)=\kappa(\kappa-1)(\kappa-n+1)}$$

- $P(G,\kappa) = P(G_1,\kappa)+P(G_2,\kappa)$

όπου: $G_1 = G+(u,v)$ → οι 2 κορυφές που δεν ενώνονται

$G_2 = G/(u,v)$ → Σύμπτυξη (u,v) . . .

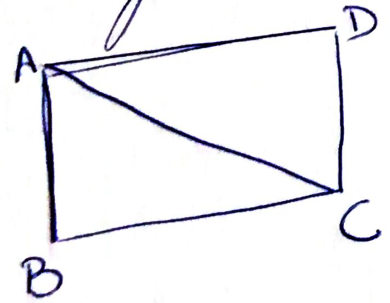
Αν έχω (u,v) και μια ενδιάμεση κορυφή



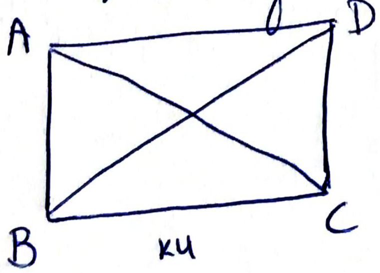
- Σύμπτυξη: αφαιρώ την ενδιάμεση κορυφή μαζί με όλες τις ακμές της

*Θα μας δώσει ένα γράφημα που δεν θα ενώνονται οι 2 κορυφές κ' θα πρέπει να βρω G_1, G_2 *.

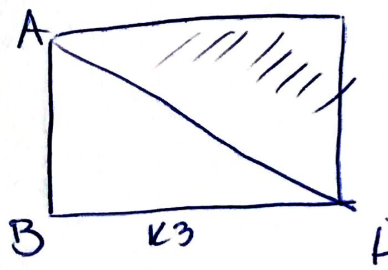
Έστω γράφημα G



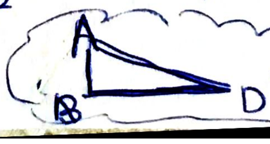
Το G_1 περιέχει και την ακμή που λείπει



$G_2 = G/(u,v)$



$P(K_n,\kappa)=\underbrace{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}(\kappa-3)_{\kappa=2}$ $P(K_3,\kappa)=\underbrace{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}$ +1

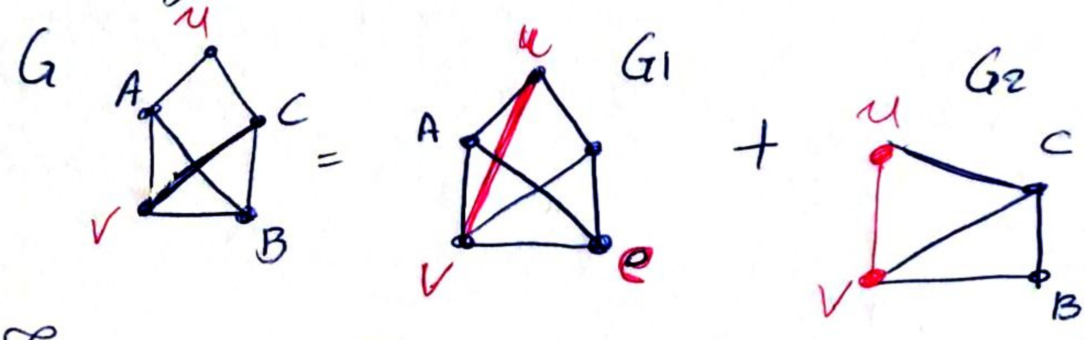


αφαιρώ την AB το G_2

Τελικά το χρωματικό πολυώνυμο είναι

$$P(G,k) = P(G_1,k) + P(G_2,k) = P(K_4,k) + P(K_3,k) = k(k-1)(k-2)^2$$

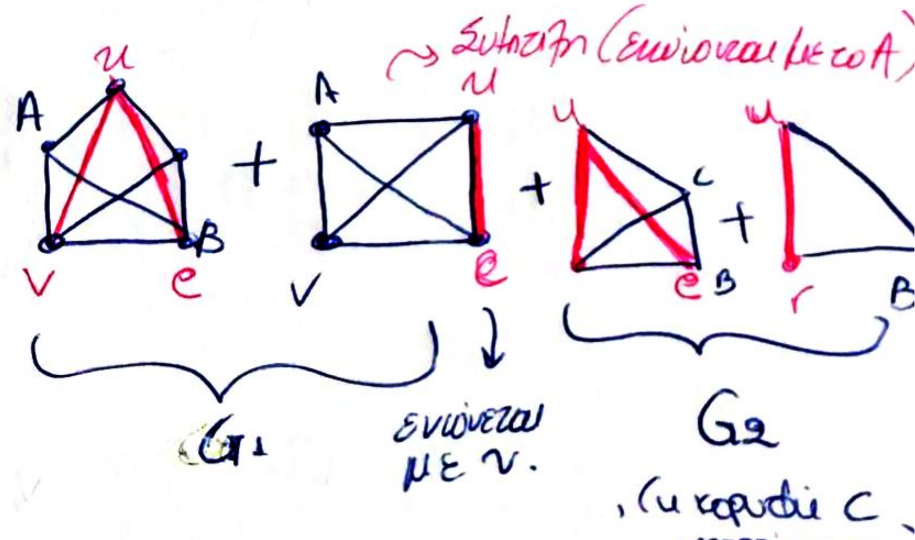
<u>Παράδειγμα</u> Ποιο είναι το $P(G,k)$?



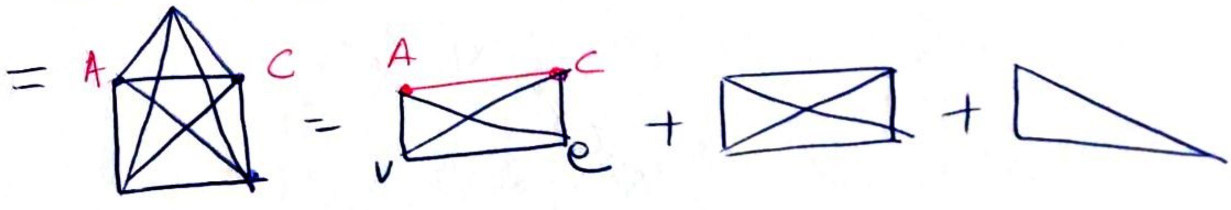
το A απορροφάται

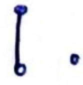
Το ίδιο και αλλού γιατί έχω κορυφές οι οποίες <u>δεν</u> ενώνονται μεταξύ τους = (u, v)

γίνεται ⟹



Δεν ενώνεται (A, C)



G  $= G_1 :$  $+ G_2 :$  $=$

$= G_{11} :$  $+ G_{12} :$  $+ G_{21} :$  $+ G_{22} :$  $=$

$= G_{111}$  $+ G_{112}$  $+ G_{211}$  $+ G_{212}$  $+ G_{22}$  $+ G_{112}$ 

$= G_{1111}$  $+ G_{1112} :$  $+ G_{112} + G_{12} + G_{211} + G_{22} + G_{212}$

$$P(G,k) = P(K_4,k) + 4P(K_3,k) + 2P(K_2,k) =$$

$$= k(k-1)(k-2)(k-3) + 4k(k-1)(k-2) + 2k(k-1)$$